Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 2 — Abgabetermin: 26.10.

6. Die Folge

$$s_1 := 1,\ s_{n+1} := \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right)$$

konvergiert bekanntlich gegen $\sqrt{2}$.

   a. Bestimmen Sie die ersten 8 Werte der Folge als exakte Brüche. (2 Pkt.)

   b. Bestimmen Sie, wieviele Ziffern die Zähler von s_n für $n = 1, \ldots, 12$ enthalten. Analysieren Sie deren Wachstumsordnung. (4 Pkt.)

   c. Bestimmen Sie, wie schnell sich diese exakten Werte an $\sqrt{2}$ annähern. (Beachten Sie, dass die Standardgenauigkeit Ihres CAS für numerische Rechnungen dafür möglicherweise nicht ausreicht) (4 Pkt.)

7. Zeigen Sie, dass eine ungerade perfekte Zahl wenigstens drei Primteiler haben muss. Ist sie nicht durch 3 teilbar, so müssen es sogar mindestens 7 Primteiler sein. (4 Pkt.)

   Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine perfekte Zahl $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$ stets

$$2 < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

   gelten muss.

8. Führen Sie für die Funktion $f(x) = \sin(x) - x \cdot \tan(x)$ eine Kurvendiskussion durch:

a. Bestimmen Sie die Null- und Polstellen der Funktion $f(x)$ (notfalls näherungsweise). (2 Pkt.)

b. Zeigen Sie, dass die Funktion außerhalb des Intervalls $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ in ihren Stetigkeitsintervallen monoton ist. (2 Pkt.)

c. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. (2 Pkt.)

Geben Sie exakte mathematische Begründungen für Ihre Aussagen über den Verlauf der Funktion.