Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 3 — Abgabetermin: 9.11.

9. $a = e^{\pi\sqrt{163}}$ kommt einer ganzen Zahl sehr nahe.

   a. Bestimmen Sie diese Zahl und die Größenordnung der Abweichung. (2 Pkt.)

   b. Es gilt $\sqrt[3]{a} \sim 640\,320$ auf 9 Dezimalstellen genau. Finden Sie die ganze Zahl b, so dass die Approximation $\sqrt[3]{a+b} \sim 640\,320$ bestmöglich ist und geben Sie auch hier die Größenordnung der Abweichung an. (2 Pkt.)

10. Bestimmen Sie die Wachstumsordnung d und -rate C der Funktion

$$f(x) := \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$$

in der Nähe von $x = 0$, d.h. solche Zahlen $C \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{N}$, dass $f(x) = C \cdot x^d + o\left(x^d\right)$ gilt.

Warum ist eine numerische Lösung dieser Aufgabe nicht sinnvoll? (4 Pkt.)

11. Der Ellipse $9\,x^2 + 16\,y^2 = 144$ soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Bestimmen Sie die Abmessungen dieses Rechtecks. (4 Pkt.)

12. Erste Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, gehen bis auf Euklid zurück. Dagegen kennt man bis heute noch keinen strengen Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge (p und $p+2$ sind prim) bzw. unendlich viele Germain-Primzahlen (p und $2p+1$ sind prim) gibt. Letztere spielten im Beweis *primes* $\in \mathcal{P}$, der im Jahr 2002 gefunden wurde, eine Rolle.

Gleichwohl zeigen numerische Experimente, dass es von beiden „relativ viele“ gibt. In der analytischen Zahlentheorie wird dazu das asymptotische Verhalten von Zählfunktionen wie

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= |\{p \leq x \,|\, p \text{ ist prim }\}| \\
t(x) &= |\{p \leq x \,|\, p \text{ und } p+2 \text{ sind prim }\}| \\
g(x) &= |\{p \leq x \,|\, p \text{ und } 2p+1 \text{ sind prim }\}|
\end{aligned}$$

untersucht, wobei $|\cdots|$ für die Anzahl der Elemente einer Menge steht. Für erste Vermutungen haben Zahlentheoretiker wie Gauss lange Listen von Primzahlen aufgestellt und ausgezählt. Dabei wurde festgestellt, dass für die Funktionen $\frac{\pi(x)}{x}$, $\frac{t(x)}{x}$ und $\frac{g(x)}{x}$ in erster Näherung $\sim C \cdot \ln(x)^a$ für verschiedene Konstanten C und Exponenten a zu gelten scheint.

Erstellen Sie mit einem Computeralgebrasystem geeignetes experimentelles Zahlenmaterial bis wenigstens 10^6 und extrahieren Sie daraus plausible Werte für C und a für die drei angegebenen zahlentheoretischen Funktionen. (8 Pkt.)