Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 4 — Abgabetermin: 16.11.

13. In der Vorlesung wurde der rationale Ausdruck

$$u_n := \frac{a^n}{(a-b)*(a-c)} + \frac{b^n}{(b-c)*(b-a)} + \frac{c^n}{(c-a)*(c-b)}$$

betrachtet und festgestellt, dass er sich für ganzzahlige $n \leq 5$ zu einem Polynom in a, b, c vereinfachen lässt.

Beweisen Sie diese Eigenschaft allgemein.

a. Zeigen Sie die Gültigkeit der Rekursionsbeziehung

$$u_n = \frac{b^{n-1} - c^{n-1}}{b-c} + a \cdot u_{n-1}.$$

Leiten Sie daraus die zu beweisende Aussage ab. (4 Pkt.)

b. Leiten Sie daraus weiter her, dass u_n für $n > 1$ mit der vollen symmetrischen Funktion h_{n-2} übereinstimmt, d.h. $u_n = h_{n-2}(a, b, c)$ gilt. (2 Pkt.)

14. Mit dieser Aufgabe soll ein CAS als Problemlösungsumgebung eingesetzt werden. Wir wollen dazu die Frage studieren, ob es Fibonaccizahlen gibt, die mit vielen Neunen enden. Die Fibonaccizahlen sind bekanntlich durch die Rekursionsrelation

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n > 1$$

definiert.

a. Finden Sie die erste Fibonaccizahl, die auf 9 endet. (1 Pkt.)

b. Finden Sie die erste Fibonaccizahl, die auf 99 endet. (1 Pkt.)

c. Untersuchen Sie, ob es Fibonaccizahlen gibt, die auf 99999 enden. Überlegen Sie sich dazu einen geeigneten Ansatz, mit dem die auszuführenden Rechnungen überschaubar bleiben.

   Erläutern Sie diesen Ansatz und geben Sie alle $n < 10^6$ an, für die F_n auf 99999 endet. (4 Pkt.)

d. Beweisen Sie, dass es Fibonaccizahlen gibt, die auf beliebig viele Neunen enden. (Genauer: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Fibonaccizahl F_{n_k}, die auf k Neunen endet) (8 Pkt.)