Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 7 — Abgabetermin: 14.12.

21. Zerlegen Sie das Polynom $x^4 + 1$ in Faktoren

    a. über den ganzen Zahlen,

    b. über $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,

    c. über $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$,

    und prüfen Sie das Ergebnis jeweils durch Ausmultiplizieren.

    Wie spielen dabei Funktionsausdrücke, Funktionsaufrufe und Transformationen im von Ihnen verwendeten CAS zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Pkt.)

22. Zeigen Sie, dass sich $x^4 + 1$ für jede Primzahl p in quadratische Faktoren über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zerlegen lässt. (6 Pkt.)

23. Finden Sie durch geeignete Anwendung der Listenoperationen `map`, `subs` und `select` alle Lösungen des Gleichungssystems

    $$\{x^3 + y = 2,\ y^3 + x = 2\},$$

    für die $x \neq y$ gilt.

    Hinweis: Verwenden Sie die `solve`-Funktion, organisieren Sie deren Ausgabe (ggf.) in eine Liste, ersetzen Sie „suspekte“ Terme durch numerische Näherungswerte und wählen Sie dann diejenigen Terme aus, für die $x \neq y$ gilt. Das sind 6 der 9 (komplexen) Lösungen des gegebenen Gleichungssystems. (6 Pkt.)

24. Die meisten CAS kennen exakte Werte von Winkelfunktionen mit dem Argument $\frac{m}{n}\pi$ und $n \leq 6$. Bestimmen Sie daraus einen exakten Wert von $\sin(6^o)$.

    Hinweis: Wegen $6^o = \frac{\pi}{30}$ gilt $\sin(6^o) = \sin(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6})$. Versuchen Sie mit `expand` diesen Ausdruck entsprechend den Additionstheoremen zu zerlegen. (4 Pkt.)