

Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 8

Abgabetermin: 04.01.

Beim Vereinfachen von geschachtelten Wurzelausdrücken zeigen sich CAS oft unerwartet schwerfällig. Um so überraschender mag es sein, dass Vereinfachungen wie

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= 6 \\ \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} &= 2\sqrt{3} \\ \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

teilweise automatisch ausgeführt werden.

24. Finden Sie ein konstruktives Kriterium, nach dem sich für vorgegebene $a, b \in \mathbb{N}$ (b kein volles Quadrat) entscheiden lässt, ob der Ausdruck $\sqrt{a + 2 \cdot \sqrt{b}}$ zu einem Ausdruck der Form $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ mit geeigneten $c, d \in \mathbb{N}$ vereinfacht werden kann. (3 Pkt.)

Geben Sie Ihre Antwort in Form einer Regel

$$\text{sqrt}(a+2*\text{sqrt}(b)) \Rightarrow A(a,b) \text{ when } B(a,b)$$

an, wobei a, b formale Parameter sind, $A(a, b)$ der zu substituierende Ausdruck und $B(a, b)$ die Bedingung angibt, unter welcher die Ersetzung ausgeführt werden darf. (3 Pkt.)

Zeigen Sie, dass das von Ihnen gefundene Kriterium auch hinreichend ist, d.h. alle Fälle erfasst, wo Simplifikation möglich ist. (2 Pkt.)

25. Finden Sie ein konstruktives Kriterium, nach dem sich für vorgegebene $a, b \in \mathbb{N}$ (b kein volles Quadrat) entscheiden lässt, ob der Ausdruck

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

zu \sqrt{c} mit geeignetem $c \in \mathbb{N}$ vereinfacht werden kann.

Geben Sie Ihre Antwort als Regel wie in Aufgabe 25 an. (4 Pkt.)

Untersuchen Sie dieselbe Frage für Ausdrücke (2 Pkt.)

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

26. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(\pi \cos(x)) = \cos(\pi \sin(x))$ und begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie zur Kontrolle Näherungswerte für die Lösungen im Intervall $[-\pi, \pi]$ an. (6 Pkt.)