

Aufgaben zum Kurs
Einführung in das symbolische Rechnen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 9**Abgabetermin: 11.01.**

27. **abl** sei ein neues Funktionssymbol, das semantisch für die Ableitungsfunktion steht, d.h. **abl**(**f**, **x**) soll die Ableitung des Ausdrucks f nach der Variablen x berechnen.

- a) Stellen Sie ein Regelsystem **ablrules** auf, mit dem sich die Ableitung polynomialer Ausdrücke in expandierter Form korrekt berechnen lässt und demonstrieren Sie die Wirkung Ihres Regelsystems am Ausdruck $f = x^3 + 5x^2 + 7x + 4$. (4 Pkt.)
- b) Erweitern Sie das Regelsystem so, dass sich auch Ableitungen polynomialer Ausdrücke in faktorisierter Form korrekt berechnen lassen und demonstrieren Sie die Wirkung Ihres Regelsystems am Ausdruck $f = (x^2 + x + 1)^3 (x^2 - x + 1)$. (3 Pkt.)
- c) Erweitern Sie das Regelsystem so, dass sich auch Ableitungen rationaler Ausdrücke korrekt berechnen lassen und demonstrieren Sie die Wirkung Ihres Regelsystems am Ausdruck $f = (x^2 + x + 1)^3 / (x^2 - x + 1)$. (3 Pkt.)
- d) Welche Erweiterungen sind erforderlich, um auch Ausdrücke korrekt abzuleiten, die trigonometrische Funktionen enthalten? (2 Pkt.)

Diese Aufgabe sollte mit einem CAS bearbeitet werden, das Definition und Anwendung von Regelsystemen erlaubt. Alternativ können Sie mit Maple oder MuPAD eine Transformationsfunktion mit den angegebenen Eigenschaften implementieren.

Die Ergebnisse in b) und c) sind jeweils in der rationalen Normalform anzugeben.

28. Für $n \geq m \geq 0$ und eine Variable q bezeichnet man

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q}{[m]_q [n-m]_q} \quad \text{mit} \quad [n]_q := \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$$

als q -Binomialkoeffizienten.

- a) Untersuchen Sie für $0 \leq m \leq n \leq 10$, ob sich $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ zu einem polynomialen Ausdruck vereinfachen lässt.

Welche Simplifikation ist der Aufgabenstellung angemessen? (3 Pkt.)

- b) Verwenden Sie Ihre Berechnungen, um eine Vermutung für den Wert von

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$$

aufzustellen. (1 Pkt.)

- c) Beweisen Sie Ihre Vermutung aus b). (4 Pkt.)