Aufgaben zur Vorlesung
Zahlen und Primzahlen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 1 — Abgabetermin: 24.10.

1. **Mersennesche Zahlen** (insgesamt 9 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie: Ist $M = 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$, eine Primzahl, so ist bereits k prim. (2 Pkt.)

   Zahlen der Form $M_p = 2^p - 1, p \in \mathbb{P}$, heißen *Mersennesche Zahlen*, die Primzahlen unter ihnen *Mersennesche Primzahlen*. Die größten heute bekannten Primzahlen sind von dieser Art.

   (b) Bestimmen Sie die Mersenneschen Primzahlen für $p < 100$. (2 Pkt.)

   (c) Zeigen Sie, dass stets (5 Pkt.)

   $$\gcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\gcd(a,b)} - 1$$

   für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

   Folglich sind die Mersenneschen Zahlen paarweise teilerfremd.

   (d)* Zeigen Sie, dass für einen Teiler r von M_p stets $r \equiv 1 \pmod{p}$ gilt. (4 Pkt.)

2. **Fermatsche Zahlen** (insgesamt 7 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie: Ist $M = 2^k + 1, k \in \mathbb{N}$, eine Primzahl, so hat der Exponent die Form $k = 2^n$. (2 Pkt.)

   Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}$, heißen *Fermatsche Zahlen*, die Primzahlen unter ihnen *Fermatsche Primzahlen*. Die Zahlen $F_n, n \leq 4$, sind prim. Für $n \geq 5$ hat man bisher nur zusammengesetzte Fermatsche Zahlen gefunden.

   (b) Zeigen Sie, dass je zwei Fermatsche Zahlen teilerfremd sind. Leiten Sie daraus einen weiteren Beweis her, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. (5 Pkt.)

(c)* Zeigen Sie, dass für einen Teiler r von $F_n, n \geq 2$, stets $r \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ gilt. (4 Pkt.)

3. Zeigen Sie mit einer Modifikation des Euklidschen Beweises, dass es unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \pmod 4$ gibt. (4 Pkt.)

4. Implementieren Sie die in der Vorlesung angegebene Formel zur Berechnung von $\pi(x)$ in einem CAS Ihrer Wahl. (8 Pkt.)

   Geben Sie den Quellcode an und dokumentieren Sie die Arbeit Ihrer Implementierung an geeignetem Beispielmaterial.

   Berechnen Sie mit Ihrer Implementierung $\pi(10^6)$ (Ergebnis: 78498)