

Aufgaben zur Vorlesung
Algorithmen für Zahlen und Primzahlen
Wintersemester 2006/07

Die Lösungen sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen zu formulieren. Neben dem unmittelbaren Ergebnis muss auch der Lösungsweg erkennbar sein, also insbesondere die mit dem Computer ausgeführten Rechnungen. Umfangreiche Zwischen- oder Endergebnisse können abgekürzt oder verbal dargestellt werden.

Serie 6

Abgabetermin: 5.12.

16. Untersuchen Sie die Wirksamkeit des Fermat-Tests: (5 Pkt.)
- Filtern Sie dazu im zu untersuchenden Intervall mit `SmallPrimesTest` zunächst alle „uninteressanten“ Zahlen aus. Wenden Sie auf die verbliebenen Zahlen den Fermat-Test mit den Basen $a \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$ an und bestimmen Sie die Anzahl zusammengesetzter Zahlen, die vom Fermat-Test übersehen wurden.
- Führen Sie die Untersuchung für die Intervalle $10^k < x < 10^k + 10^3$ mit $5 \leq k \leq 7$ aus. Geben Sie für jeden der Werte k an:
- die Anzahl der Zahlen, welche den `SmallPrimesTest` bestanden haben,
 - die Anzahl der Zahlen, welche darunter den Fermat-Test bestanden haben (also hoffentlich Primzahlen sind),
 - die Anzahl der Zahlen, welche den Fermat-Test bestanden haben, aber keine Primzahlen sind.
17. a) Zeigen Sie, dass eine Carmichael-Zahl m stets quadratfrei ist und immer wenigstens 3 Primfaktoren hat. Führen Sie dazu die Annahmen $m = p^a \cdot q$, $a > 1$, und $m = p \cdot q$ jeweils zum Widerspruch. (4 Pkt.)
- b) Zeigen Sie, dass $N = (6t + 1)(12t + 1)(18t + 1)$ eine Carmichaelzahl ist, wenn $6t + 1$, $12t + 1$ und $18t + 1$ Primzahlen sind. (2 Pkt.)
- c) Bestimmen Sie mit dieser Formel wenigstens 5 weitere Carmichaelzahlen und testen Sie damit den Las-Vegas-Test aus der Vorlesung, der auf dem Fermat-Test aufsetzt. Welche dieser Zahlen bestehen auch den `SmallPrimesTest`? Erläutern Sie Ihr Ergebnis. (4 Pkt.)